Прямые в пространстве

Николай Дуров

декабрь 2002

1 Введение

В этом тексте мы рассмотрим проблему задания точек, прямых, плоскостей и сфер в трехмерном пространстве, а также связанные с ней вопросы и задачи, например, задачу поиска общих касательных плоскостей к трем данным сферам.

Рассматриваемая проблема довольно важна, поскольку, хотя в университетском курсе геометрии эти вопросы и изучаются, однако им уделяется мало внимания и времени — видимо, считается неоправданным тратить много времени на такие «элементарные» вещи. Мы постараемся показать, что такая точка зрения необоснованна, и попытаемся дать адекватное изложение этой темы.

С точки зрения автора, центральным в этом изложении является использование *плюккеровых координат* для задания прямых в пространстве. Однако будет показано, что, несмотря на то, что этот способ задания прямых практически нигде не упоминается (имеются в виду в первую очередь учебники по геометрии, а также книги по компьютерной графике, которые, как ни странно, также обладают указанным недостатком), он, тем не менее, довольно прост и получаемые формулы являются естественным обобщением соответствующих формул на плоскости. Поэтому для сравнения сначала будет рассмотрен случай плоскости; кроме того, будет продемонстрировано, что даже при рассмотрении простых задач на плоскости естественно возникают однородные координаты, которые, помимо прочего, часто позволяют обойтись в вычислениях целыми числами, что полезно как и при решении задач вручную, так и при вычислении на компьютере.

В качестве дополнения будут приведены разнообразные задачи: теоретические задачи, упражнения на проверку некоторых простых формул, вопросы на понимание текста, задачи на вычисления вручную, задачи на вычисления на калькуляторе или компьютере, задачи на написание программ.

2 Плоскость

Напомним, как задаются точки и прямые на плоскости. Точка P задается парой координат (x_P, y_P), которую мы будем обозначать также (x_1, x_2), а прямая ℓ — уравнением $Ax+By+C=0$, т.е. тройкой чисел (C, A, B), в которой A и B не обращаются одновременно в ноль. Отметим, что эта тройка чисел задана с точностью до пропорциональности, т.е. если их одновременно домножить на одно и то же число, не равное нулю, то задаваемая ими прямая от этого не изменится, и наоборот, если две тройки задают одну и ту же прямую, то они пропорциональны. Поэтому такое задание прямых на плоскости дает пример *однородных координат*. В общем случае мы будем говорить, что объект задается с помощью однородных координат, если ему сопоставляется некоторый набор чисел $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$, не равных одновременно нулю, причем этот набор определяется объектом с точностью до пропорциональности. Пример — только что рассмотренное задание прямых на плоскости. Однако в этом примере требовалось, чтобы хотя бы одно из чисел A и B было отлично от нуля, в то время как общее определение однородных координат допускает также набор $(C, 0, 0)$, где $C \neq 0$ — произвольное число; все такие наборы пропорциональны, так что в принципе они «должны соответствовать одной и той же прямой». Что же это за дополнительная прямая? Если попытаться подставить $(C, A, B) = (1, 0, 0)$ в уравнение прямой, то получим, что эта прямая есть множество точек (x, y), таких, что $0 = Ax + By + C = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 = 1$, т.е. пустое множество. Этот ответ, конечно же, вовсе не то, что хотелось бы получить. Скоро мы увидим, что на самом деле этот набор соответствует бесконечно удаленной прямой на проективной плоскости; множество конечных точек этой прямой действительно пусто, что и объясняет только что полученный результат.

Введем полезное обозначение, позволяющее различать на письме «обычные» и однородные координаты: будем писать, как и раньше, $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ для набора обычных координат и $(w_1 : w_2 : \dots : w_n)$ для набора однородных координат. Таким образом, например, $(6, 10, 12) \neq (9, 15, 18)$, однако $(6 : 10 : 12) = (9 : 15 : 18)$; набор $(0, 0, 0)$ является корректным набором обычных координат, в то время как набор $(0 : 0 : 0)$ некорректен, так как однородным координатам запрещается одновременно обращаться в ноль. Еще одно общее замечание: часто бывает удобным нумеровать однородные координаты, начиная с нуля, и писать $(w_0, w_1, \dots, w_{n-1})$ вместо $(w_1, w_2, \dots, w_n)$. Кроме того, отметим, что для задания n-мерного объекта обычно необходимо n обычных координат или $n+1$ однородных: необходимость в дополнительной однородной координате появляется из-за отождествления пропорциональных наборов.

Отметим еще одно свойство однородных координат, полезное для вычислений: любой набор рациональных однородных координат пропорционален набору целых однородных координат (т.к. всегда можно домножить все координаты на общий знаменатель); кроме того, можно считать эти однородные координаты в совокупности взаимно простыми, поскольку всегда можно сократить на наибольший общий делитель. Примеры: $(\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}) = (6 : 4 : 3)$; $(0.8 : 0.6 : 1) = (8 : 6 : 10) = (4 : 3 : 5)$. С помощью этого свойства часто можно проводить все или почти все вычисления с целыми числами, особенно если все исходные данные были целыми или рациональными.

Правда, если мы попытаемся применить это общее замечание к нашей ситуации — геометрии на плоскости — то мы столкнемся с очевидной проблемой, связанной с тем, что мы располагаем однородными координатами прямых, но не точек. Поэтому хочется каким-то образом (по возможности, наиболее простым) завести однородные координаты точек плоскости, и научиться переводить их в обычные декартовы координаты и обратно.

Исторически первым решением этой проблемы были *однородные барицентрические координаты*, введенные Мебиусом в 1827 году. Идея заключается в том, что на плоскости выбирается произвольный треугольник ABC, и всякому набору $(\alpha : \beta : \gamma)$, такому, что $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, сопоставляется центр масс α, β и γ, помещенных в точки A, B и C соответственно. Ясно, что при замене набора масс на пропорциональный центр масс не изменяется, так что мы действительно получаем способ введения однородных координат на плоскости. Однако нам этот способ не очень подходит: непонятно, как выбирать треугольник ABC, а формулы для перевода координат в декартовы и особенно формулы для обратного перевода довольно сложны.

Поэтому мы рассмотрим другой стандартный способ введения однородных координат: а именно, точке с обычными координатами (x_1, x_2) сопоставим точку $(1 : x_1 : x_2)$; обратное преобразование задается формулой $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1/x_0, x_2/x_0)$. Таким образом, мы сопоставили каждой точке плоскости набор однородных координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ с $x_0 \neq 0$, и наоборот, каждому такому набору однородных координат соответствует точка плоскости. Как и в случае с прямыми, мы хотим рассматривать все наборы однородных координат $(x_0 : x_1 : x_2)$, такие, что x_0, x_1 и x_2 не равны одновременно нулю. Поэтому к «обычным» точкам плоскости (которые мы теперь будем называть *конечными*) мы добавим дополнительные (или *бесконечно удаленные*) точки вида $(0 : x_1, x_2)$, где x_1 и x_2 не равны одновременно нулю.[1] Совокупность всех точек (конечных и бесконечно удаленных) мы будем называть *проективной плоскостью.*

Запишем теперь уравнение прямой, определенной тройкой $(C : A : B)$ (т.е. уравнением $Ax+By+C = 0$ в обычных координатах). Мы, конечно же, хотим, чтобы множество конечных точек, лежащих на этой прямой, не изменилось. Поскольку конечной точке $(x_0 : x_1 : x_2)$ сопоставляются обычные координаты $(x_1/x_0, x_2/x_0)$, мы получаем уравнение $A\frac{x_1}{x_0} + B\frac{x_2}{x_0} + C = 0$, которое должно быть выполнено для конечных точек, т.е. при $x_0 \neq 0$. Поэтому это уравнение можно домножить на x_0 (это может повлиять только на точки с $x_0 = 0$, т.е. бесконечно удаленные). Получим уравнение $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$, которое имеет смысл для всех точек проективной плоскости и для всех прямых, включая и бесконечно удаленную прямую $(1 : 0 : 0)$ (которая, как это ни странно, состоит в точности из бесконечно удаленных точек). Если теперь переобозначить координаты прямой $(A_0 : A_1 : A_2) = (C : A : B)$, мы получим уравнение

$$A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 = 0$$

[1] Здесь, видимо, следует ответить на давно возникший вопрос: почему я упорно повторяю, что x_0, x_1 и x_2 не равны одновременно нулю, вместо того, чтобы записать это условие в виде $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ (как это часто делают в начальном курсе анализа)? Ответ очень прост: хотя нигде не уточнялось, что такое число, и подразумевалось, что все координаты суть вещественные числа, однако на самом деле все эти рассуждения остаются в силе для комплексных координат, и в действительности проходят над любым полем; кроме того, большинство формул «работают» над произвольным коммутативным кольцом, не обязательно целостным и даже приведенным; из-за этого автор аккуратно различает далее условия вроде $x = 0$ и $x^2 = 0$.

Именно стремление получить это уравнение в такой симметричной форме обусловило такой, на первый взгляд, нелогичный порядок координат $(C : A : B)$ для прямой $Ax + By + C = 0$ в начале наших рассмотрений. Эта симметрия показывает, что на самом деле все однородные координаты равнозначны: мы могли бы, например, объявить бесконечно удаленной прямую $x_1 = 0$ и определить преобразования координат $(x, y) \mapsto (x : 1 : y)$ и $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0/x_1, x_2/x_1)$ — это не повлияло бы на внутреннюю геометрию проективной плоскости.

В современной математике естественно рассматривать точку как нечто первичное, а прямую как множество точек; однако мы, исходя из симметрии приведенной выше формулы, будем считать, что прямые и точки совершенно равноправны, и между ними задано *отношение инцидентности*: говорят, что точка P и прямая ℓ *инцидентны*, если точка P лежит на прямой ℓ. Это позволяет по выбору рассматривать прямую как множество лежащих на ней точек или точку как множество проходящих через нее прямых.

В связи с этим мы вводим следующие определения точек и прямых проективной плоскости:

- *Точка* P — это набор чисел $(x_0 : x_1 : x_2)$, не равных одновременно нулю, рассматриваемый с точностью до пропорциональности; при этом числа x_0, x_1 и x_2 называются однородными координатами точки P.

- *Прямая* ℓ — это набор чисел $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$, не равных одновременно нулю, рассматриваемый с точностью до пропорциональности; при этом числа α_0, α_1 и α_2 называются однородными координатами прямой ℓ.

- Точка $P = (x_0 : x_1 : x_2)$ *инцидентна* прямой $\ell = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$, если

  $$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$$

  В этом случае говорят также, что точка P *лежит на* прямой ℓ или что прямая ℓ *проходит через* точку P.

- Прямую и точку, заданные одним и тем же набором однородных координат, мы будем называть *двойственными*.

Заметим, что двойственность переводит точки в прямые и прямые в точки, сохраняя при этом отношение инцидентности, что немедленно следует из определений.

Выясним теперь, что соответствует окружности с центром $Q = (y_0 : y_1 : y_2) = (y_1/y_0, y_2/y_0)$ и радиусом R. Точка $P = (x_0 : x_1 : x_2)$ лежит на этой окружности тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{x_1}{x_0} - \frac{y_1}{y_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0} - \frac{y_2}{y_0}\right)^2 = R^2$$

или, после домножения на $x_0^2 y_0^2$:

$$(x_1 y_0 - x_0 y_1)^2 + (x_2 y_0 - x_0 y_2)^2 - R^2 x_0^2 y_0^2 = 0$$

В частности, получаем формулу для расстояния d между *конечными* точками $P = (x_0 : x_1 : x_2)$ и $Q = (y_0 : y_1 : y_2)$:

$$d^2 = \frac{(x_1 y_0 - x_0 y_1)^2 + (x_2 y_0 - x_0 y_2)^2}{x_0^2 y_0^2}$$

В том случае, если одна точка или сразу обе бесконечно удалены (и различны), эти формулы дают $+\infty$ из-за нуля в знаменателе, что довольно логично.

Еще более частный случай этой формулы — расстояние от точки P до начала координат $O = (1 : 0 : 0)$:

$$d^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0^2}$$

Для того, чтобы найти расстояние от точки до прямой, нам понадобится понятие *полярной двойственности* относительно окружности C радиуса R с центром в начале координат O. Полярная двойственность сопоставляет каждой точке прямую (которая называется *полярой* этой точки) и каждой прямой точку (*полюс* этой точки), так, что эти сопоставления взаимно обратны и сохраняют инцидентность, так же, как и «простая» двойственность, рассмотренная выше. Геометрически поляра точки P

есть геометрическое место точек Q, таких, что $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=R^2$. В частности, из этого описания следует, что поляра точки P, лежащей на окружности C, есть касательная к C в точке P, и что поляра точки P, лежащей вне C, может быть построена следующим образом: если m_1 и m_2 — это касательные к C, проведенные из точки P, и Q_1 и Q_2 — соответствующие точки касания, то прямая Q_1Q_2 — это в точности поляра точки P.

Несложно видеть, что для точек $P=(x_0:x_1:x_2)$ и $Q=(y_0:y_1:y_2)$ условие $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=R^2$ означает (после домножения на общий знаменатель), что $x_1y_1+x_2y_2-R^2x_0y_0=0$; таким образом, поляра точки $P=(x_0:x_1:x_2)$ есть прямая $(-R^2x_0:x_1:x_2)$; отсюда получаем, что полюс прямой $\ell=(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)$ есть точка $(-\alpha_0/R^2:\alpha_1:\alpha_2)=(-\alpha_0:R^2\alpha_1:R^2\alpha_2)$.

На самом деле полярную двойственность можно определить относительно произвольного конического сечения C, т.е. плоской кривой, заданной уравнением второй степени $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant 2}q_{ij}x_ix_j=0$, где $q_{ij}=q_{ji}$ — коэффициенты квадратичной формы, образующие симметричную квадратную матрицу $\mathbf{q}=(q_{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant 2}$. Теперь, если сопоставить точке $(x_0:x_1:x_2)$ и прямой $(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)$ соответствующие векторы-столбцы

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{bmatrix}\quad\text{и}\quad\alpha=\begin{bmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}$$

то прямая α является полярой точки $\mathbf{x}$ тогда и только тогда, когда $\alpha=\mathbf{q}\mathbf{x}$, т.е. если $\alpha_i=\sum_{0\leqslant j\leqslant 2}q_{ij}x_j$, и наоборот, $\mathbf{x}$ — полюс прямой α, если $\mathbf{x}=\mathbf{q}^{-1}\alpha$.

В частности, это можно применить к окружности с центром в точке $\mathbf{y}=(y_0:y_1:y_2)$ и радиусом R: в этом случае

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}y_1^2+y_2^2-R^2y_0^2 & -y_0y_1 & -y_0y_2\\ -y_0y_1 & y_0^2 & 0\\ -y_0y_2 & 0 & y_0^2\end{bmatrix}$$

При $y_0=1$, $y_1=y_2=0$, снова получаем те же формулы.

Теперь можно записать условие того, что точка $\mathbf{x}$ лежит на окружности (или коническом сечении) C, воспользовавшись тем фактом, что точка лежит на C тогда и только тогда, когда она лежит на своей поляре относительно C. Правда, мы получим всего лишь условие $\mathbf{x}^T\mathbf{q}\mathbf{x}=0$, т.е. $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant 2}q_{ij}x_ix_j=0$ — это как раз условие, из которого мы определяли коэффициенты q_{ij}.

Гораздо более интересен тот факт, что полюс прямой α относительно C лежит на этой прямой тогда и только тогда, когда эта прямая касается C; отсюда получаем условие касания $\alpha^T\mathbf{q}^{-1}\alpha=0$. Для окружности радиуса R с центром в $\mathbf{y}=(y_0:y_1:y_2)$ мы получаем следующее условие касания:

$$(\alpha_0y_0+\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)^2-R^2y_0^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)=0$$

Отсюда получаем формулу расстояния d от точки $(x_0:x_1:x_2)$ до прямой $(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)$:

$$d^2=\frac{(\alpha_0x_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)^2}{x_0^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}$$

Можно было бы продолжить дальше список этих формул; однако в этом нет необходимости, поскольку все равно скоро будут приведены соответствующие формулы для прямых в пространстве. Приведем только (двойственные друг другу) формулы для прямой, проходящей через заданные две точки и для точки пересечения двух прямых:

$$\alpha=(x_1y_2-x_2y_1:x_2y_0-x_0y_2:x_0y_1-x_1y_2)$$

и

$$\mathbf{x}=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1:\alpha_2\beta_0-\alpha_0\beta_2:\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0)$$

3 Пространство

Построение (трехмерного) проективного пространства и определение его точек и плоскостей с помощью однородных координат совершенно аналогично тому, что было нами проделано для точек и прямых на плоскости. Однако нам надо еще научиться описывать прямые в пространстве с помощью подходящим образом определенных однородных координат, а также задать все три отношения инцидентности: между точками и прямыми, между прямыми и плоскостями и между точками и плоскостями.

Оказывается, что наиболее удобный в большинстве случаев способ задания прямых в пространстве заключается в использовании шести однородных координат $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$, удовлетворяющих уравнению второй степени (*уравнению Плюккера*):

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$$

Введенные таким образом однородные координаты называются *плюккеровыми*, или *грассмановыми*, координатами прямой в пространстве.

Введем следующие определения:

- *Точка* P — это набор чисел $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, не равных одновременно нулю, рассматриваемый с точностью до пропорциональности; при этом числа x_0, x_1, x_2 и x_3 называются однородными координатами точки P. Однородные координаты точки P записываются также в виде вектора-столбца

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- *Прямая* ℓ — это набор чисел $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$, не равных одновременно нулю, рассматриваемый с точностью до пропорциональности; при этом числа p_{ij} (где $0 \leqslant i < j \leqslant 3$) называются однородными координатами прямой ℓ. Они записываются также с помощью кососимметрической матрицы

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ -p_{01} & 0 & p_{12} & p_{13} \\ -p_{02} & -p_{12} & 0 & p_{23} \\ -p_{03} & -p_{13} & -p_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

  Поэтому часто полагают $p_{ij} = -p_{ji}$ при $0 \leqslant j < i \leqslant 3$, $p_{ii} = 0$ при $0 \leqslant i \leqslant 3$, имея в виду именно это представление в виде матрицы. Определитель этой матрицы есть, как несложно проверить, $\det \mathbf{p} = (p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12})^2 = 0$.

- *Плоскость* α — это набор чисел $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$, не равных одновременно нулю, рассматриваемый с точностью до пропорциональности; при этом числа α_0, α_1, α_2 и α_3 называются однородными координатами плоскости α.

- Точка $P = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ *инцидентна* плоскости $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$, если

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

  В этом случае говорят также, что точка P *лежит на* плоскости α или что плоскость α *проходит через* точку P.

- Точка $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ инцидентна прямой $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$, если $p_{01}x_2 - p_{02}x_1 + p_{12}x_0 = p_{01}x_3 - p_{03}x_1 + p_{13}x_0 = p_{02}x_3 - p_{03}x_2 + p_{23}x_0 = p_{12}x_3 - p_{13}x_2 + p_{23}x_1 = 0$.

- Прямая $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$ инцидентна плоскости $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$, если $\mathbf{p}\alpha = 0$, т.е. $p_{01}\alpha_1 + p_{02}\alpha_2 + p_{03}\alpha_3 = -p_{01}\alpha_0 + p_{12}\alpha_2 + p_{13}\alpha_3 = -p_{02}\alpha_0 - p_{12}\alpha_1 + p_{23}\alpha_3 = -p_{03}\alpha_0 - p_{13}\alpha_1 - p_{23}\alpha_2 = 0$.

- Плоскость и точку, заданные одним и тем же набором однородных координат, мы будем называть *двойственными*.

- Прямые p и q *двойственны*, если $p_{01} = q_{23}$, $p_{02} = -q_{13}$, $p_{03} = q_{12}$, $p_{12} = q_{03}$, $p_{13} = -q_{02}$ и $p_{23} = q_{01}$. В этом случае мы будем писать $p = q'$ или $q = p'$.

Отметим, что двойственность сохраняет все три отношения инцидентности, как это непосредственно видно из определений.

Как и в двумерном случае, точке с декартовыми координатами (x, y, z) сопоставляется точка с однородными координатами $(1 : x : y : z)$, а обратное отображение задается формулой $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_1/x_0, x_2/x_0, x_3/x_0)$. При этом плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ задается с помощью однородных координат $(D : A : B : C)$.

Теперь мы приведем решения основных геометрических задач, связанных с точками, прямыми и плоскостями в пространстве. Проверка приведенных далее формул производится непосредственно исходя из определений. Так, например, во второй задаче надо проверить, что p — действительно прямая, т.е. что p_{ij} не равны одновременно нулю и удовлетворяют уравнению Плюккера, а также что точки x и y действительно лежат на этой прямой; это можно рассматривать как несложное упражнение. Кроме того, результаты предыдущих пунктов очень сильно помогают доказывать последующие. Умелое применение двойственности может сократить усилия почти в два раза.

В дальнейшем x, y, z, t — точки, p, q, r — прямые, α, β, γ — плоскости; $O = (1 : 0 : 0 : 0)$ — начало координат, R — радиус окружности, d — расстояние.

1. *Является ли точка x бесконечно удаленной?*

   Проверить условие $x_0 = 0$.

2. *Найти прямую p, проходящую через различные точки x и y.*

   $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ при $0 \leqslant i < j \leqslant 3$.

3. *Совпадают ли две точки x и y?*

   Проверить, что в пункте 2 все p_{ij} равны нулю, т.е. что $x_i y_j = x_j y_i$ при $0 \leqslant i < j \leqslant 3$.

4. *Найти расстояние между конечными точками x и y.*

$$d^2 = \frac{p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2}{x_0^2 y_0^2} = \frac{(x_1 y_0 - x_0 y_1)^2 + (x_2 y_0 - x_0 y_2)^2 + (x_3 y_0 - x_0 y_3)^2}{x_0^2 y_0^2}$$

5. *Лежит ли точка y на сфере с центром в x и радиусом R?*

   $p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2 - R^2 x_0^2 y_0^2 = 0$. Если $x = O$, формула упрощается: $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - R^2 y_0^2 = 0$.

6. *Найти плоскость α, проходящую через точки x, y, z, не лежащие на одной прямой*

   $\alpha_0 = \widetilde{\alpha}_{123}$, $\alpha_1 = -\widetilde{\alpha}_{023}$, $\alpha_2 = \widetilde{\alpha}_{013}$, $\alpha_3 = -\widetilde{\alpha}_{012}$, где

$$\widetilde{\alpha}_{ijk} = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}$$

7. *Лежат ли точки x, y, z на одной прямой?*

   Можно проверить условия $\widetilde{\alpha}_{123} = \widetilde{\alpha}_{023} = \widetilde{\alpha}_{013} = \widetilde{\alpha}_{012} = 0$; можно вместо этого провести через x и y прямую и проверить, лежит ли z на этой прямой.

8. *Лежат ли точки x, y, z, t в одной плоскости?*

   Можно провести прямую p через x и y, прямую q через z и t и проверить, пересекаются ли p и q. Можно также проверить равенство

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0$$

9. *Является ли прямая p бесконечно удаленной?*

   $p_{01} = p_{02} = p_{03} = 0$.

10. *Указать направляющий вектор конечной прямой p.*

    $\overline{v} = (p_{01}, p_{02}, p_{03})$ (вектор $\overline{v}$ задан в обычных координатах).

11. *Совпадают ли прямые p и q?*

    Надо проверить координаты на пропорциональность — например, с помощью равенств $p_{ij} q_{i'j'} = p_{i'j'} q_{ij}$.

12. *Найти точку x пересечения прямой p и плоскости α.*

    $\mathbf{x} = \mathbf{p}\alpha$, т.е. $x_0 = p_{01}\alpha_1 + p_{02}\alpha_2 + p_{03}\alpha_3$, $x_1 = -p_{01}\alpha_0 + p_{12}\alpha_2 + p_{13}\alpha_3$, $x_2 = -p_{02}\alpha_0 - p_{12}\alpha_1 + p_{23}\alpha_3$, $x_3 = -p_{03}\alpha_0 - p_{13}\alpha_1 - p_{23}\alpha_2$.

13. *Лежит ли прямая p в плоскости α?*

    Проверить, что в предыдущем пункте $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$; см. также определение инцидентности.

14. *Параллельна ли конечная прямая p конечной плоскости α?*

    $p_{01}\alpha_1 + p_{02}\alpha_2 + p_{03}\alpha_3 = 0$ или что в предыдущем пункте $x_0 = 0$.

15. *Найти расстояние d от конечной прямой p до конечной плоскости α, если известно, что они параллельны*

    Для любого k от 1 до 3

    $$d^2 = \frac{x_k^2}{p_{0k}^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{(p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)}$$

    Надо выбрать такое значение k, для которого знаменатель не обращается в ноль.

16. *Провести плоскость α через прямую p и точку x, не лежащую на ней.*

    $\widetilde{\alpha}_{ijk} = p_{ij}x_k - p_{ik}x_j + p_{jk}x_i$, откуда $\alpha_0 = p_{12}x_3 - p_{13}x_2 + p_{23}x_1$, $\alpha_1 = -p_{02}x_3 + p_{03}x_2 - p_{23}x_0$, $\alpha_2 = p_{01}x_3 - p_{03}x_1 + p_{13}x_0$, $\alpha_3 = -p_{01}x_2 + p_{02}x_1 - p_{12}x_0$.

17. *Лежит ли точка x на прямой p?*

    Проверить условия $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ для α_i из предыдущего пункта; см. также определение инцидентности.

18. *Найти расстояние d от конечной точки x до конечной прямой p.*

    $$d^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{x_0^2(p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2)}$$

    В случае $x = O = (1 : 0 : 0 : 0)$ формула упрощается:

    $$d^2 = \frac{p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{23}^2}{p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2}$$

19. *Касается ли прямая p сферы с центром в x и радиусом R?*

    $$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - R^2x_0^2(p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2) = 0$$

    Для сферы с центром в O формула упрощается: $p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{23}^2 - R^2(p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2) = 0$.

20. *Пересекаются ли прямые p и q? Или, что одно и то же, лежат ли эти прямые в одной плоскости?*

    Проверить $p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01} = 0$.

21. *Указать какие-нибудь точки на прямой p.*

    Например, точки $(0 : p_{01} : p_{02} : p_{03})$, $(p_{01} : 0 : -p_{12} : -p_{13})$, $(p_{02} : p_{12} : 0 : -p_{23})$ и $(p_{03} : p_{13} : p_{23} : 0)$. Правда, некоторые из этих точек могут оказаться некорректными (со всеми координатами, равными нулю), но не более двух одновременно.

22. *Указать какие-нибудь плоскости, проходящие через p.*

    Например, плоскости $(0 : -p_{23} : p_{13} : -p_{12})$, $(p_{23} : 0 : -p_{03} : p_{02})$, $(-p_{13} : p_{03} : 0 : -p_{01})$, $(p_{12} : -p_{02} : p_{01} : 0)$. Здесь можно сделать замечание, аналогичное сделанному в предыдущем пункте.

23. *Найти точку x пересечения различных прямых p и q, если уже известно, что они пересекаются.*

    Выбрать произвольную плоскость α, проходящую через q, и пересечь эту плоскость с p. (надо только выбрать α так, чтобы она не содержала p)

24. *Найти плоскость α, содержащую различные прямые p и q, если известно, что такая плоскость есть.*

    Выбрать произвольную точку x на q (не лежащую при этом на p) и провести плоскость через x и p.

25. *Параллельны ли конечные прямые p и q?*

    Проверить условия $p_{01}q_{02} = p_{02}q_{01}$, $p_{02}q_{03} = p_{03}q_{02}$ и $p_{01}q_{03} = p_{03}q_{01}$.

26. *Найти угол φ между конечными прямыми p и q.*

$$\cos^2\varphi = \frac{(p_{01}q_{01} + p_{02}q_{02} + p_{03}q_{03})^2}{(p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2)(q_{01}^2 + q_{02}^2 + q_{03}^2)}$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{(p_{01}q_{02} - p_{02}q_{01})^2 + (p_{01}q_{03} - p_{03}q_{01})^2 + (p_{02}q_{03} - p_{03}q_{02})^2}{(p_{01}q_{01} + p_{02}q_{02} + p_{03}q_{03})^2}$$

27. *Найти расстояние d между конечными прямыми p и q.*

$$d^2 = \frac{(p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01})^2}{(p_{01}q_{02} - p_{02}q_{01})^2 + (p_{01}q_{03} - p_{03}q_{01})^2 + (p_{02}q_{03} - p_{03}q_{02})^2}$$

    Если прямые p и q параллельны, знаменатель обращается в ноль; тогда надо выбрать произвольную точку x на q и найти расстояние от нее до p.

28. *Является ли плоскость α бесконечно удаленной?*

    Проверить $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

29. *Найти прямую p, по которой пересекаются различные плоскости α и β.*

    Положим $p'_{ij} = \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i$ и возьмем в качестве p прямую, двойственную к p'. Например, $p_{01} = p'_{23} = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2$ и $p_{02} = -p'_{13} = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3$.

30. *Совпадают ли плоскости α и β?*

    Проверить, что в предыдущем пункте все $p_{ij} = 0$, т.е. что $\alpha_i\beta_j = \alpha_j\beta_i$ при $0 \leqslant i < j \leqslant 3$.

31. *Найти вектор нормали к конечной плоскости α.*

    $\overline{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (вектор $\overline{v}$ задан в обычных координатах).

32. *Параллельны ли конечные плоскости α и β?*

    Проверить коллинеарность их нормалей, т.е. условия $\alpha_i\beta_j = \alpha_j\beta_i$ при $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, или же условия $p_{01} = p_{02} = p_{03} = 0$.

33. *Лежит ли точка x на плоскости α?*

    $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$.

34. *Найти расстояние от конечной точки x до конечной плоскости α.*

$$d^2 = \frac{(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2}{x_0^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)}$$

    Если $x = O$, формула упрощается:

$$d^2 = \frac{\alpha_0^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

35. *Касается ли плоскость α сферы с центром в x и радиусом R?*

$$(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 - R^2 x_0^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = 0$$

Если $x = O$, формула упрощается:

$$d^2 = \alpha_0^2 - R^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$$

36. *Найти поляру α точки x относительно сферы с центром в O и радиусом R.*

$(-R^2 x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$

37. *Найти поляру q прямой p относительно сферы с центром в O и радиусом R.*

$(q_{01} : q_{02} : q_{03} : q_{12} : q_{13} : q_{23}) = (p_{23} : -p_{13} : p_{12} : -R^2 p_{03} : R^2 p_{02} : -R^2 p_{01})$.

38. *Найти полюс x плоскости α относительно сферы с центром в O и радиусом R.*

$(-\alpha_0 : R^2\alpha_1 : R^2\alpha_2 : R^2\alpha_3)$.

39. *Как ведут себя координаты прямых и плоскостей при проективной замене координат, заданной в матричном виде $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$?*

$\alpha' = (\mathbf{A}^T)^{-1}\alpha$, $\mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p}\mathbf{A}^T$.

40. *Найти на конечной прямой p точку, ближайшую к O.*

$(p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2 : p_{02}p_{12} + p_{03}p_{13} : -p_{01}p_{12} + p_{03}p_{23} : -p_{01}p_{13} - p_{02}p_{23})$

41. *Найти точки пересечения прямой p и сферы радиуса R с центром в начале координат O.*

Последовательно вычислим $S = p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2$, $t^2 = R^2 S - (p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{23}^2)$ и затем

$$x = (S : p_{01}t + p_{02}p_{12} + p_{03}p_{13} : p_{02}t - p_{01}p_{12} + p_{03}p_{23} : p_{03}t - p_{01}p_{13} - p_{02}p_{23})$$

4 Задачи и упражнения

Как уже было отмечено, можно рассматривать каждую из почти полусотни формул, приведенных в тексте, как несложную задачу на доказательство. Далее будут приведены дополнительные задачи и упражнения. Рекомендуется прорешать хотя бы часть этих упражнений, прежде чем приступать к доказательству формул из текста.

1. Найдите однородные координаты координатных плоскостей Oxy, Oxz и Oyz, а также плюккеровы координаты осей координат Ox, Oy и Oz.

2. Найдите плюккеровы координаты прямых, проведенных через следующие пары точек: а) $(0,0,0)$ и $(1,0,0)$; б) $(0,1,0)$ и $(1,0,0)$; в) $(0,0,0)$ и $(1,1,0)$; г) $(0,0,0)$ и $(1,1,1)$; д) $(1:0:0:0)$ и $(0:1:2:3)$; е) $(1:2:1:4)$ и $(0:1:2:3)$; ж) $(4:25:0:0)$ и $(3:0:25:0)$; з) $(5/3,0,0)$ и $(0,7/4,0)$; и) $(3,2,4)$ и $(1,2,3)$; к) $(1/4,3/4,1/2)$ и $(4/3,1/3,2/3)$.

3. Какая прямая задается плюккеровыми координатами: а) $(1:0:0:0:0:0)$; б) $(0:1:0:0:0:0)$; в) $(0:0:0:1:0:0)$; г) $(0:0:0:0:0:1)$; д) $(1:1:0:0:0:0)$; е) $(0:1:1:0:0:0)$; ж) $(1:1:1:0:0:0)$; з) $(1:0:1:0:1:0)$; и) $(1:0:0:1:1:0)$; к) $(1:0:0:1:0:0)$; л) $(1:1:1:1:2:1)$; м) $(2:3:4:2:2:-1)$?

4. На каких прямых из предыдущего упражнения лежат точки: α) $(0,0,0)$; β) $(1:1:0:0)$; γ) $(0:1:0:0)$; δ) $(1,-1,0)$; ε) $(2,-3,1)$.

5. Во всех ситуациях из предыдущего упражнения, когда точка не лежит на некоторой прямой, найдите плоскость, проходящую через эту прямую и эту точку.

6. Найдите точки пересечения следующих прямых с координатными плоскостями Oxy, Oxz, Oyz, а также с бесконечно удаленной плоскостью: а) $(2:3:4:-1:2:2)$; б) $(1:1:1:1:-2:1)$; в) $(1:1:0:0:0:0)$; г) $(1:0:0:0:0:0)$; д) произвольная прямая $(p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{12}:p_{13}:p_{23})$.

7. Какие прямые из упражнения 3 конечны?

8. Найдите расстояния между точками из упражнения 4 и прямыми из упражнения 3.

9. Какие пары прямых из упражнения 3 пересекаются?

10. Какой смысл угла φ из пункта 26, если прямые p и q не пересекаются?

11. а) Какая матрица $\mathbf{A}$ соответствует замене координат, заключающейся в параллельном переносе начала координат $O(0,0,0)$ в точку $O'(a_1,a_2,a_3)$? Как при такой замене координат преобразуются (по формулам пункта 39) координаты точек, прямых и плоскостей? б) А что происходит при повороте осей Ox и Oy на угол φ относительно начала координат? в) Что будет, если изменить направление оси z на противоположное? г) Если поменять местами координаты y и z? д) Если увеличить масштаб по всем осям в λ раз?

12. Среди формул предыдущего пункта нет формулы для угла между прямой и плоскостью. Как вы думаете, почему? Выведите эту формулу самостоятельно (возможно, воспользовавшись уже имеющимися формулами).

13. Найдите расстояния между всевозможными парами конечных прямых из упражнения 3.

14. Лежат ли в одной плоскости точки $(-1,1,0)$, $(0.16,0.12,0.08)$, $(3:5:7:-7)$ и $(9/47,3/47,5/47)$?

15. Найдите прямую, проходящую через первые две точки из упражнения 14.

16. Найдите плоскость, проходящую через первые три точки из упражнения 14.

17. Каковы условия на однородные координаты для того, чтобы а) точка б) прямая в) плоскость содержалась в Oxy?

18. Может ли в формулах пункта 18 для расстояния между точкой и прямой знаменатель обратиться в ноль, если известно, что точка и прямая конечны? Тот же вопрос по поводу формул пункта 15.

19. Придумайте простые мнемоники для запоминания формул пунктов 6, 12 и 16.

20. Проверьте, что первая из точек, указанных в пункте 21, некорректна (т.е. имеет все однородные координаты равные нулю) в том и только том случае, если прямая p бесконечно удалена, т.е. содержится в бесконечно удаленной плоскости. Придумайте аналогичные условия для остальных точек этого пункта. Как вы думаете, каков геометрический смысл этих точек? Найдите условия, при которых сразу две из приведенных точек некорректны. Могут ли быть одновременно некорректными три из них? Верно ли, что эти формулы всегда дают хотя бы две *различные* корректно определенные точки?

21. Проверьте, что первая плоскость из пункта 22 есть плоскость, проходящая через прямую p и начало координат O. Проделайте дальше работу, аналогичную проделанной в предыдущем пункте для пункта 21.

22. В тексте нет формул для каких-нибудь прямых, лежащих на данной плоскости. Постарайтесь восполнить этот пробел, составив (по возможности наиболее естественным образом) список прямых, лежащих на общей плоскости α. Желательно, чтобы для всякой плоскости хотя бы одна из этих прямых была корректно определена.

23. Действуя аналогичным образом, придумайте какие-нибудь прямые, проходящие через заданную точку.

24. Уточните, как именно можно выбирать плоскость α в пункте 23 и точку x в пункте 24. Почему так сделать всегда получится?

25. Предположим, вам дана точка $x=(x_0:x_1:x_2:x_3)$, лежащая на сфере с центром в начале координат и радиусом R. Найдите формулу для плоскости, касательной к сфере в указанной точке. Аналогичный вопрос для произвольной сферы.

26. Может ли бесконечно удаленная точка лежать на сфере?

27. Пусть даны три сферы с центрами в точках O, O_1 и O_2 и радиусами R, R_1 и R_2 соответственно. Придумайте, как свести задачу нахождения точек пересечения этих трех сфер к задаче пересечения одной из этих сфер с двумя плоскостями (*Указание:* полезно повычитать различные уравнения друг из друга). Как теперь свести эту задачу к задаче пересечения прямой и сферы, рассмотренной в пункте 41?

28. Придумайте, как найти плоскости, касающиеся заданной сферы с центром в начале координат, и проходящие через заданную прямую p. (*Указание:* нельзя ли как-нибудь найти поляры этих плоскостей, по возможности воспользовавшись пунктом 41?)

29. Как найти плоскости, проходящие через две указанные точки и касающиеся заданной сферы (с центром в начале координат)?

30. Пусть даны три сферы, такие же, как в задаче 27. Рассмотрим плоскость α, одновременно касающуюся всех трех сфер.

    а) Докажите, что α может пересекать линию центров OO_1 в одной из двух точек, зависящих только от первых двух сфер. Может ли одна из этих точек быть бесконечно удаленной? Какой геометрической ситуации это соответствует? От чего зависит, по которой из двух точек плоскость α пересекает линию центров?

    б) Сведите задачу нахождения всех плоскостей α, касающихся трех данных сфер, к задаче нахождения плоскостей, касающихся первой сферы, и проходящих через две заданные точки. Сколько всего может быть таких плоскостей?

    в) Соберите воедино результаты этого и предыдущего упражнений и напишите программу, которая бы решала поставленную задачу для трех сфер с целыми координатами центров и целыми радиусами, не превосходящими по модулю пятисот. Ваша программа должна находить координаты всех искомых плоскостей с 12 знаками после запятой.

31. Выведите формулу, которая по конечным прямым p и q позволяла бы найти точку x на p, ближайшую к q.

5 Ответы на упражнения

1. Плоскости $(0:0:0:1)$, $(0:0:1:0)$, $(0:1:0:0)$; прямые $(1:0:0:0:0:0)$, $(0:1:0:0:0:0)$, $(0:0:1:0:0:0)$.

2. а) $(1:0:0:0:0:0)$; б) $(1:-1:0:-1:0:0)$; в) $(1:1:0:0:0:0)$; г) $(1:1:1:0:0:0)$; д) $(1:2:3:0:0:0)$; е) $(1:2:3:3:2:-5)$; ж) $(-3:4:0:25:0:0)$; з) $(-20:21:0:35:0:0)$; и) $(-2:0:-1:4:5:-2)$; к) $(13:-5:2:-11:-6:4)$.

3. а) ось Ox; б) ось Oy; в) пересечение Oxy с бесконечно удаленной плоскостью; г) пересечение Oyz с бесконечно удаленной плоскостью; д) прямая $x=y$ в Oxy; е) прямая $y=z$ в Oyz; ж) прямая $x=y=z$; з) прямая $z=x-1$ в Oxz; и) прямая $y=z=-1$; к) прямая $y=-1$, $z=0$; л) прямая $x-1=y=z+1$; м) прямая $x=2t$, $y=3t-1$, $z=4t-1$.

4. α) прямые а, б, д, е, ж; β) а, з; γ) а, в, и, к; δ) к; ε) ни на одной.

5. См. таблицу:

	α) $(0,0,0)$	β) $(1:1:0:0)$	γ) $(0:1:0:0)$	δ) $(1,-1,0)$	ε) $(2,-3,1)$
а)	—	—	—	$(0:0:0:1)$	$(0:0:1:3)$
б)	—	$(0:0:0:1)$	$(0:0:0:1)$	$(0:0:0:1)$	$(0:-1:0:2)$
в)	$(0:0:0:1)$	$(0:0:0:1)$	—	$(0:0:0:1)$	$(1:0:0:-1)$
г)	$(0:1:0:0)$	$(1:-1:0:0)$	$(1:0:0:0)$	$(1:-1:0:0)$	$(2:-1:0:0)$
д)	—	$(0:0:0:1)$	$(0:0:0:1)$	$(0:0:0:1)$	$(0:-1:1:5)$
е)	—	$(0:0:-1:1)$	$(0:0:-1:1)$	$(0:1:1:-1)$	$(0:2:1:-1)$
ж)	—	$(0:0:-1:1)$	$(0:0:-1:1)$	$(0:1:1:-2)$	$(0:-4:-1:5)$
з)	$(0:0:1:0)$	—	$(0:0:1:0)$	$(1:-1:0:1)$	$(1:-1:0:1)$
и)	$(0:0:1:-1)$	$(0:0:1:-1)$	—	$(1:0:1:0)$	$(2:0:1:1)$
к)	$(0:0:0:1)$	$(0:0:0:1)$	—	—	$(1:0:1:2)$
л)	$(0:-1:2:-1)$	$(1:-1:1:0)$	$(1:0:-1:1)$	$(3:-2:1:1)$	$(9:-5:1:4)$
м)	$(0:1:2:-2)$	$(1:-1:2:-1)$	$(1:0:4:-3)$	$(1:-3:-2:3)$	$(3:-7:-2:5)$

6. а) $(2:1:1:0)$, $(-3:1:0:2)$, $(2:0:1:-2)$, $(0:2:3:4)$; б) $(1:-2:1:0)$, $(1:1:0:1)$, $(1:0:-1:2)$, $(0:1:1:1)$; в) нет (прямая содержится в Oxy), $(1:0:0:0)$, $(1:0:0:0)$, $(0:1:1:0)$; г) нет, нет, $(1:0:0:0)$, $(0:1:0:0)$; д) $(p_{03}:p_{13}:p_{23}:0)$, $(p_{02}:p_{12}:0:-p_{23})$, $(-p_{01}:0:p_{12}:p_{13})$, $(0:p_{01}:p_{02}:p_{03})$.

7. Все прямые, кроме в) и г).

8. См. таблицу:

	α) $(0,0,0)$	β) $(1:1:0:0)$	δ) $(1,-1,0)$	ε) $(2,-3,1)$
а)	0	0	1	$\sqrt{10}$
б)	0	1	1	$\sqrt{5}$
д)	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$
е)	0	1	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$2\sqrt{3}$
ж)	0	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{14}$
з)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1	3
и)	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	$2\sqrt{2}$
к)	1	1	0	$\sqrt{5}$
л)	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{14}$
м)	$\frac{3}{\sqrt{29}}$	$\sqrt{\frac{6}{29}}$	$\sqrt{\frac{22}{29}}$	$\sqrt{\frac{312}{29}}$

9. См. таблицу (“+” означает, что прямые пересекаются или совпадают):

	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м
а	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	−	−
б	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+	−	−
в	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	−	−
г	−	+	+	+	−	+	−	−	−	−	−	−
д	+	+	+	−	+	+	+	−	−	+	−	−
е	+	+	−	+	+	+	+	−	+	−	−	+
ж	+	+	−	−	+	+	+	−	+	−	+	−
з	+	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−
и	+	−	+	−	−	+	+	−	+	+	−	+
к	+	+	+	−	+	−	−	−	+	+	−	−
л	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−	+	−
м	−	−	−	−	−	+	−	−	+	−	−	+

10. Угол между прямыми, параллельными данным и проходящими через начало координат.

11. Матрица перехода $\mathbf{A}$ ($\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$) в каждом из пяти случаев:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

а) $(x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3) = (x_0 : x_1 - a_1x_0 : x_2 - a_2x_0 : x_3 - a_3x_0)$, $(\alpha'_0 : \alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3) = (\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$, $(p'_{01} : p'_{02} : p'_{03} : p'_{12} : p'_{13} : p'_{23}) = (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} + a_2p_{01} - a_1p_{02} : p_{13} + a_3p_{01} - a_1p_{03} : p_{23} + a_3p_{02} - a_2p_{03})$;

б) $(x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3) = (x_0 : x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi : -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi : x_3)$, $(\alpha'_0 : \alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3) = (\alpha_0 : \alpha_1\cos\varphi + \alpha_2\sin\varphi : -\alpha_1\sin\varphi + \alpha_2\cos\varphi : \alpha_3)$, $(p'_{01} : p'_{02} : p'_{03} : p'_{12} : p'_{13} : p'_{23}) = (p_{01}\cos\varphi + p_{02}\sin\varphi : -p_{01}\sin\varphi + p_{02}\cos\varphi : p_{03} : p_{12} : p_{13}\cos\varphi + p_{23}\sin\varphi : -p_{13}\sin\varphi + p_{23}\cos\varphi)$;

в) $(x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3) = (x_0 : x_1 : x_2 : -x_3)$, $(\alpha'_0 : \alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3) = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : -\alpha_3)$, $(p'_{01} : p'_{02} : p'_{03} : p'_{12} : p'_{13} : p'_{23}) = (p_{01} : p_{02} : -p_{03} : p_{12} : -p_{13} : -p_{23})$;

г) $(x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3) = (x_0 : x_1 : x_3 : x_2)$, $(\alpha'_0 : \alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3) = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_3 : \alpha_2)$, $(p'_{01} : p'_{02} : p'_{03} : p'_{12} : p'_{13} : p'_{23}) = (p_{01} : p_{03} : p_{02} : p_{13} : p_{12} : -p_{23})$;

д) $(x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3) = (\lambda x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, $(\alpha'_0 : \alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3) = (\alpha_0 : \lambda\alpha_1 : \lambda\alpha_2 : \lambda\alpha_3)$, $(p'_{01} : p'_{02} : p'_{03} : p'_{12} : p'_{13} : p'_{23}) = (\lambda p_{01} : \lambda p_{02} : \lambda p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$.

12. Видимо, потому что этот угол может быть легко вычислен как дополнение до $\pi/2$ угла между направляющим вектором прямой p и нормалью к плоскости α — см. пункты 10 и 31.

13. См. таблицу:

	а)	б)	д)	е)	ж)	з)	и)	к)	л)	м)
а)	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{5}$
б)	0	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
д)	0	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{11}}$
е)	0	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
ж)	0	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
з)	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{11}}$
и)	$\sqrt{2}$	1	1	0	0	1	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
к)	1	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	0	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{5}$
л)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
м)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{11}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{\frac{2}{11}}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	0

14. Да. Эта плоскость — $(-1 : 2 : 3 : 4)$.

15. Прямая, проведенная через $(1 : -1 : 1 : 0)$ и $(25 : 4 : 3 : 2)$ — это $(29 : -22 : 2 : -7 : -2 : 2)$.

16. Плоскость, проходящая через $(29 : -22 : 2 : -7 : -2 : 2)$ и $(3 : 5 : 7 : -7)$ — это $(73 : -146 : -219 : -292) = (-1 : 2 : 3 : 4)$.

17. а) $x_3 = 0$; б) $p_{03} = p_{13} = p_{23} = 0$; в) $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

18. Если все координаты вещественны, то нет. В общем случае это возможно, если прямая p *изотропна*, т.е. скалярный квадрат ее направляющего вектора равен нулю, как, например, в случае вектора $(1 : i : 0)$. Для формул пункта 15 ответ аналогичен: если плоскость содержит изотропную прямую, то знаменатель обратится в нуль.

19. И так понятно — надо только внимательно посмотреть на формулы.